

## A pF-görbék matematikai leírása

VÁRALLYAY GYÖRGY, RAJKAI KÁLMÁN, J. A. PACSEPSZKIJ  
és E. V. MIRONENKO

MTA Talajtani és Agrokémiai Kutató Intézete, Budapest,  
Szovjetunió Tudományos Akadémiájának Agrokémiai és  
Talajtani Intézete, Pucscino

A mezőgazdasági vízgazdálkodás alapvető célja, hogy mesterséges beavatkozásokkal úgy szabályozza a talaj vízgazdálkodását, hogy az a természet (vagy emberi felhasználásra kerülő természetes) növények vízellátását folyamatosan és az optimálist minél inkább megközelítően biztosítsa; kedvező irányban befolyásolja a talajban végbemenő anyag- és energiaforgalmi folyamatokat, fenntartsa, illetve fokozza ezáltal a talaj aktuális és potenciális termékenységét; mindezt anélkül, hogy az ember természeti környezetének (bioszféra), illetve az abban kialakult természetes egyensúlynak kedvezőtlen irányú megváltozását, megbomlását eredményezné. Ugyanakkor biztosítson minél kedvezőbb feltételeket a különböző agrotechnikai rendszerek, termesztési technológiák kialakításához [43].

A mezőgazdasági vízgazdálkodási beavatkozások szükségességét és körülményeit az éghajlati viszonyok, valamint a termesztett növények igényei mellett a talaj vízgazdálkodása szabja meg. Ennek alapvető tényezői a talajfelszín és a talajvízszint közötti háromfázisú talajrétegek egymásutánisága, vastagsága, települési viszonyai és vízgazdálkodási tulajdonságai: nedvességtartalma, a talajnedvesség állapota, kémiai összetétele, vertikális és horizontális mozgása. A talaj vízgazdálkodásának szabatos jellemzéséhez a felsorolt paraméterek pontos és kvantitatív adatain túlmenően szükség van azok tér- és időbeni dinamizmusának, az azt befolyásoló tényezőknek, azok hatásmechanizmusának egzakt ismeretére is [43].

Ezek közül is megkülönböztetett jelentőségű a talajnedvesség potenciálja, hisz a talajban levő víz növények általi felvehetőségét, mozgásának körülményeit egyaránt ez határozza meg.

A talajnedvesség összpotenciáljának ( $\psi_t$ ) három fő komponense a gravitációs potenciál ( $\psi_g$ ), az ozmózis potenciál ( $\psi_s$ ) és a talaj szilárd fázisának integrált összhatását kifejező matrix potenciál ( $\psi$ ):

$$\psi_t = \psi_g + \psi_s + \psi$$

Mivel a  $\psi_g$  értéke Földünkön gyakorlatilag konstans ( $g \approx \text{const.}$ ), izotermális viszonyok és a talaj kis sótartalma ( $\psi_s \approx 0$ ) esetén a talajnedvesség potenciálja jól jellemezhető a matrix potenciál értékével [12]. A matrix potenciál jellemzésére SCHOFIELD [34] 1935-ben bevezette a pF-fogalmát, amely a  $\psi$  szívóerő vízoszlop cm-ben kifejezett értékének a logaritmusát.

A talaj nedvességtartalma és a talajnedvesség matrix potenciálja közti összefüggést kifejező pF-görbék szemléletesen ábrázolják a különböző erőkkel kötött nedvességfrakciók, illetve a levegő mennyiségét, arányát a talaj háromfázisú rétegeiben. Ennek megfelelően sokoldalúan felhasználhatók a talaj vízgazdálkodásának jellemzésére, az annak mesterséges szabályozását célzó különböző mezőgazdasági vízgazdálkodási beavatkozások tervezésének és kivitelezésének talajtani megalapozására [39].

A Magyar Tudományos Akadémia Talajtani és Agrokémiai Kutató Intézetében az elmúlt években kialakítottuk a pF-görbék meghatározásának sorozatvizsgálatokra is alkalmas módszereit, berendezéseit [39]. A méréseink során felhalmozódott adatanyag alapján kutatásaink négy fő irányban folynak:

- a) pF-görbék matematikai leírása;
- b) összefüggések megállapítása az egyszerű talajfizikai jellemzők (elsősorban a mechanikai összetétel, térfogatsúly, tömördőzség stb.), és a pF-görbék között;
- c) további fontos vízgazdálkodási jellemzők (elsősorban az ún. „transzport” koefficiensek, a háromfázisú talajrétegek kapilláris vezetőképessége, illetve a diffúzió sebessége a tenzió, illetve a nedvességtartalom függvényében  $k(\psi)$ ,  $k(\theta)$ ,  $D(\psi)$ ,  $D(\theta)$ ) számítás útján történő közelítő meghatározása a pF-görbék alapján;

d) főbb hazai talajtípusaink vízgazdálkodásának korszerű jellemzése a pF-görbék, a kétfázisú zóna hidraulikus vezetőképessége, valamint a háromfázisú zóna kapilláris vezetőképessége alapján.

A szükségszerűen egymásra épülő lépcsők közül az első a pF-görbék matematikai leírása. Ez ad ugyanis lehetőséget arra, hogy a néhány (rendszerünkben tíz) diszkrét mérési pontot folytonos pontsorrá, folyamatos függvényé alakítsuk.

A pF-görbék matematikai leírása

- jó lehetőséget nyújt a mérési adatok korszerű számítógépes feldolgozására, tárolására, interpretálására,
- előfeltétele a b) és c) pontban megjelölt számításoknak, illetve összefüggés-vizsgálatoknak,
- könnyen kezelhető alapot nyújt a talajok vízgazdálkodási tulajdonságok szerinti kategorizálására, térképezésére, monitoring és prognózis-rendszerének kidolgozására,
- jelentős előnyt jelent továbbá a helyszíni tenzióméteres mérések nedvességtartalomra történő átszámításánál, a kiadagolható és kiadagolandó öntözővíz mennyiségének meghatározásánál, tenzióméterekkel szabályozott automatikus öntözőrendszerek kialakításánál [43].

RICHARDS [32] már a pF-fogalmának bevezetése előtt felhívta a figyelmet a talajnedvesség kapilláris potenciáljának jelentőségére a talaj–víz–növény kölcsönhatások tanulmányozásában. Munkáival nagymértékben hozzájárult a talajnedvesség potenciáljának meghatározására szolgáló módszerek kialakításához is [33]. A pF-görbék meghatározására igen sok módszert dolgoztak ki, amelyekről VÁRALLYAY [39] 1973-ban folyóiratunkban is részletes áttekintést közölt. Az atmoszféra alatti tenziótartományban (pF 0–3) különböző porózus anyagokból készülő „vákuum-szívólapok” illetve tenzióméterek, az atmoszféra feletti tenziótartományban úgyszólván kizárólag a nyomásmembrános készülékek [33, 36] kerültek alkalmazásra a pF-görbék meghatározására. A porózus lapok anyaga Amerikában és Ausztráliában többnyire kerámia, üvegszűrő, vagy más szilárd anyag. Európában ezek mellett — főként STAKMAN és munkatársainak [35] nyomán — kiterjedten használják a homoklap- és kaolinlap-berendezéseket. Hazánkban VÁRALLYAY [39] fejlesztette tovább STAKMAN berendezéseit és kedvező tapasztalatait

alapján ezek kerültek szabványosításra [42]. Hasonló berendezést fejlesztett ki Kanadában TOPP és ZEBCHUK [37].

Legújabbban a Wageningeni Kultúrtechnikai és Vízgazdálkodási Intézetben (Hollandia) dolgoztak ki egy homoklap- és kaolinlap-berendezésekre alapozott automatizált rendszert a pF-görbék és a kapilláris vezetőképesség mérésére és közvetlen számítógépes adatfeldolgozására [2].

A talaj vízgazdálkodásának, nedvesséfgorgalmának mesterséges szabályozása egyre több, pontosabb, egzakt fizikai tartalommal bíró, egyszerűen mérhető adatot, információt tesz szükségessé a talaj vízgazdálkodási tulajdonságairól.

Ezeket a mennyiségben és minőségben ugrásszerűen fokozódó igényeket kielégíteni hivatott kutatások egyik része a fontosabb vízgazdálkodási paraméterek közvetlen meghatározására szolgáló vizsgálati módszerek és berendezések továbbfejlesztését célozza. Másik jelentős része arra irányul, hogy lehetőleg számszerű összefüggéseket állapítson meg az egyszerű talajfizikai paraméterek (kötöttségi szám, telítési %, higroszkóposság, mechanikai összetétel, térfogatsúly, stb.), valamint a talaj vízgazdálkodási jellemzői, az egész pF-görbe, illetve annak jellemző pontjai (vízkapacitás, holtvíztartalom, hasznosítható vízkészlet, stb.) között. Ezen összefüggések ismeretében ugyanis lehetővé válik ez utóbbiak számítás útján történő meghatározása az egyszerű jellemzők alapján. Ilyen számításoknak természetesen csak akkor van gyakorlati jelentősége, ha a számításához szükséges paraméterek mérése egyszerűbb, mint a számítandó érték (pl. a pF-görbe) közvetlen meghatározása, tehát számítások útján könnyebben, gyorsabban és egyszerűbben jutunk a kívánt információkhoz.

A szakirodalomban sok ilyen próbálkozás található. Hazánkban pl. KREYBIG, MADOS és ID. VÁRALLYAY [in 10] már a negyvenes években közöltek tapasztalati összefüggéseket az ARANY-féle kötöttségi szám, MITSCHERLICH, KURON és SIK-féle higroszkóposság ( $H_y$ ,  $h_y$ ,  $h_{y_1}$ ), valamint a vízkapacitás és holtvíztartalom közötti kapcsolatra vonatkozóan [10]. BALAN [1] különböző romániai talajok vizsgálata alapján állapított meg lineáris regressziós összefüggéseket a talajok agyagtartalma, higroszkópossága, fajlagos felülete, adszorpciós kapacitása, valamint az 1, 4, 8 és 15 atm. erővel kötött nedvességfrakciók (pF 3; 3,6; 3,9; 4,2) mennyisége között. LAL [21] Nigéria talajait jellemző 120 mintára számított lineáris regressziót a homok (0,05–2,0 mm) és agyagtartalom (< 0,002 mm), illetve a pF 0; 2,0; 2,4 és 4,2 szívóerőnél mért nedvességtartalom között. NIELSEN és SHAH [27] egyszerű grafikus módszert dolgozott ki a talajok pF 4,2-vel ( $\psi = 15\ 000$  cm  $\approx 15$  atm.) jellemzett holtvíztartalmának közelítő meghatározására a hidrométeres eljárással meghatározott homok (0,05–2,0 mm), iszap (0,002–0,05 mm) és agyagfrakció (< 0,002 mm) mennyisége alapján. A holtvíztartalom (HV) és a homokfrakció mennyisége között 1%-os szinten szignifikáns negatív, a HV és az agyagtartalom között szoros, nem lineáris pozitív korrelációt állapítottak meg, míg a HV és iszap-tartalom között nem találtak szignifikáns összefüggést. Még jobb összefüggést találtak a homok, iszap és agyagfrakció mennyiségének aránya, valamint a HV között. Lengyelországban TRZECZKI [38] 7 változós regresszió-elemzéssel vizsgálta a KACSINSZKIJ-szerinti mechanikai elemzés 6 szemeseméretű frakciója (1–0,1; 0,1–0,05; 0,05–0,02; 0,02–0,006; 0,006–0,002; < 0,002 mm), a talaj szervesanyag-tartalma valamint a pF-görbe három pontja (pF 2,4  $\approx$  szabadföldi vízkapacitás; pF 3,0; pF 4,2  $\approx$  holtvíztartalom) közti összefüggést. Nagyszámú minta feldolgozása alapján különböző lengyelországi talajok szántott rétegére és ez alatti szintjére olyan — jó valószínűséggel általánosítható — parciális regressziós paramétereket ad meg, amelyek felhasználásával a mechanikai elemzés és a szervesanyag-meghatározás mért adatai alapján a pF-görbe említett három pontja jó közelítéssel számítható.

CANARACHE [3] igen változatos romániai talajminta-anyagon végzett részletes statisztikai elemzést, amelyben a keretes módszerrel meghatározott szabadföldi vízkapacitás ( $VK_{sz}$ ) és víztartó-képesség (VT) szerepeltek függő, a talaj agyagtartalma (A), a fizikai talajféleség inhomogenitását jellemző index (IH) és a talajvízszint terepalatti mélysége (TM) pedig független változóként. A talajszelvény kedvező drénviszonyai esetén a  $VK_{sz}$ -A összefüggést harmadfokú polinommal közelítette. Rossz drénviszonyok esetén a VT-IH összefüggést lineáris, a VT-TM összefüggést logaritmikus függvényekkel írta le. A tényezők közti integrált kölcsönhatásokat többváltozós regressziós-egyenlet rendszerekkel analizálta.

VISSER [48] grafikus módszert dolgozott ki a pF-görbék (pF 1,0; 2,0; 3,4; 6,0) közelítő meghatározására egyszerűen mérhető, sőt már a helyszínen is becsülhető paraméterek alapján, a pórustérfogat, a talaj humusz és agyagtartalma, adszorpciós kapacitása. Nomogramjairól az adszorpciós kapacitás „indexe” (S) (amely az agyagtartalom és a szervesanyag-tartalom négyszeresének összegével közelít) és az egyszerű térfogatsúly-

meghatározásból számítható összporozitás ismeretében közvetlenül leolvasható a pF 1,0; 2,0; 3,4 és 6,0 értéke, s e pontok alapján jó közelítéssel megszerkeszthető a pF-görbe. A nomogramokról rögtön szembetűnik, hogy a pF 1,0 szívóerőnél mért nedvességtartalom gyakorlatilag az összporozitástól, a pF 6,0 értéke pedig csak az S értéktől függ, míg a közbeeső tenziótartományban a két tényező integrált összehatása érvényesül. Elvében, sőt módszerében is teljesen hasonló grafikus eljárást közöl DUMITRIU és CANARACHE [7], azzal a különbséggel, hogy nomogramjaikról az összporozitás és agyagtartalom ismeretében a pF 1,0; 1,6 és 2,0 értékhez tartozó nedvességtartalom olvasható le.

A kutatások egy másik iránya a talaj szilárd fázisát felépítő szemcsék fajlagos felülete és a pF-görbe között keres számszerű összefüggéseket. ZAWADZKI [50] a vízgőz-adszorpciós módszerrel meghatározott fajlagos felület, valamint a pF 1,5; 2,0; 2,5; 3,0 és 4,2-nél mért nedvességtartalom közötti jó tapasztalati összefüggésekről számolt be. MICSURIN [23], MICSURIN és LÜTAEV [24] lineáris parciális összefüggéseket állapított meg a fajlagos felület és a pF-görbe atmoszféra feletti szakasza (pF 3,00; 3,50; 4,20; 4,48; 5,92 és 6,36) között. Mivel a magas tenziótartományban a talajnedvesség potenciálját döntő mértékben a különböző szorpciós erők határozzák meg, ezért ebben a tartományban a matrix potenciál jellemzése jól közelíthető az adszorpció-típusú folyamatokat leíró egyenletekkel, adszorpciós izotermákkal. KOVÁCS [14, 15, 16], KOVÁCS és PÉCZELY [17, 18] ezért a pF-görbék felső szakaszának leírására a szilárd és folyadékfázis határfelületén érvényesülő erők hatását kifejező hatodfokú parabolát alkalmazta. Mivel a szorpciós erők hatása a szilárd fázis felületétől mért távolsággal rohamosan csökken, ezért a magas tenziótartományban az elemi szemcsék fajlagos felülete és a talaj szívóerejének mértéke között szoros összefüggés van. Az elmondottakból azonban az is következik, hogy az alacsonyabb tenziótartományban ez az összefüggés egyre kevésbé érvényes, hisz itt a talajnedvesség potenciálját főként más erők (kapilláris és gravitációs potenciál) befolyásolják, amelyek (elsősorban aggregált, szerkezetes talajok esetében) nem az elemi szemcsék fajlagos felületétől, hanem a szilárd fázist felépítő elemi szemcsék, mikro- és makroaggregátumok, szerkezeti elemek mérete, alakja, térbeli elrendeződése által meghatározott pórusgeometriától függnek. Ezért bár a szakirodalomban több olyan próbálkozás is található, amelyben a pF-görbe felső szakaszának leírása vagy az itt mért pontok ( $\approx$  higroszkóposági értékszámok) alapján az egész görbét igyekeznek rekonstruálni, ezek elméletileg nem tekinthetők kellőképpen megalapozottnak, hisz nincs közvetlen oksági összefüggés a pF-görbe felső és alsó szakasza között. Egyet kell érteni tehát HILLEL [12] azon megállapításával, amely szerint ma még nincs megfelelő elmélet a pF-görbe számítására, előrejelzésére az alapvető talajtulajdonságok alapján, az adszorpció mechanizmusa és a pórusméretgeometria ugyanis túlságosan komplex ahhoz, hogy egy egyszerű modellel leírható legyen. Ezért van szükség azokra az empirikus egyenletekre, amelyeket az egyes szerzők a pF-görbék leírására javasolnak. Ezek azonban többnyire csak bizonyos talajokra és bizonyos korlátozott nedvességtartományra érvényesek.

Legáltalánosabban alkalmazott egyenlet a pF-görbe matematikai leírására a GARDNER és munkatársai [9] által javasolt alábbi összefüggés:

$$\psi = \mu \theta^{-B} \quad (1)$$

ahol:  $\psi$  = matrix potenciál — vízoszlop cm.

$\theta$  = adott  $\psi$ -hez tartozó nedvességtartalom — térfogat %.

$\mu$  = kísérleti úton meghatározott állandó

B = kísérleti úton meghatározott kitevő

Az (1) egyenlettel leírt összefüggés ugyan csak a pF-görbe egy részére illeszkedik szorosan, de olyan esetekben, mikor a nedvességtartalom csak szűk határok között változik, eredményesen alkalmazható. GARDNER egyenletét, illetve annak transzformált alakját

$$\log \psi = \log a - B \cdot \log \theta \quad (2)$$

alkalmazta a pF-görbék leírására, többek között VISSER [47], GLOBUSZ [11], MICSURIN [23], NERPIN és CSUDNOVSZKIJ [25, 26], VARAZASVILI, LÜTAEV és PETROVA [46] is.

VISSER [49] megállapítja, hogy a pF-görbe felső részének leírása adszorpció típusú folyamatokat leíró egyenletekkel, alsó része a pórusok átmérőjének valószínűségi eloszlásával közelíthető. Mivel ez utóbbinak jellemzésére nincs általánosan elfogadott összefüggés, csupán empirikus közelítések állnak rendelkezésre, ezért azoknál döntő szempont az egyszerűség. VISSER [47] az alábbi empirikus egyenletet javasolta:

$$\psi = a(f - \theta)^b / \theta^c \quad (3)$$



ahol:  $f$  = porozitás — térfogat arány

$\theta$  = nedvességtartalom — térfogat arány

$a, b$  és  $c$  = kísérletileg meghatározott állandók.

Az  $a, b$  és  $c$  állandók értékének meghatározására VISSER [47] egyszerű grafikus eljárást közölt. Vizsgálati adatai szerint az  $f$ -értéke 0,4–0,6, az  $a$ -értéke 0–3, a  $b$ -értéke 0–10 között váltakozott.

Elvében hasonló KOVÁCS [14, 16], valamint KOVÁCS és PÉCZELY [17, 18] közelítése is. Szerintük a „talajnedvesség-egyensúlyi görbe” (pF-görbe) két részből szerkeszthető meg. A telítetlen zónában hatodfokú hiperbola, az átmeneti zónában pedig egy valószínűségi eloszlási függvény érvényes, míg a nyílt kapilláris zónában a két függvénygörbe összegződését kell figyelembe venni [18]. Hangsúlyozzák, hogy az elméleti kapcsolatok csak homogén és konstans szemcseméretű halmazokra jellemzők. Szerkezetes talajok esetében csak a kapcsolatok jellegéről tájékoztatnak. Ehhez csak annyit tennénk hozzá, hogy a valószínűségi eloszlási függvény megfogalmazásához szükség van a szilárd fázis elemei között kialakuló pórusrendszer geometriájának, architektúrájának (PHILIP szóbeli közlése) [az ún. KOZENY-féle effektív pórusátmérőnek ( $D_p$ ) és az ún. alak-koefficiensnek ( $d_p$ )] az ismeretére. Ennek meghatározása pedig a talajban (ebben a térben heterogén, időben is változó, háromfázisú polidiszperz rendszerben) többnyire lényegesen körülményesebb, mint a pF-görbe közvetlen mérése. Ezért az ilyen típusú számításoknak véleményünk szerint elsősorban fordított irányban (pF-görbe  $\rightarrow$  pórusgeometria) lehet létjogosultsága.

NERPIN és CSUDNOSZKIJ [25, 26] exponenciális függvényekkel közelíti a pF-görbét:

$$\psi = e^{A\theta} \quad (4)$$

ahol:  $A$  = kísérletileg meghatározott állandó.

OLSZTA [28, 29] harmadfokú polinomot alkalmazott eredményesen a pF-görbék matematikai leírására.

A hiszterézis, az adszorpciós és deszorpciós pF-görbék közötti különbség, amely különösen a heterogén pórusgeometriájú talajokban (elsősorban duzzadó-rendszerekben) igen jelentős lehet, a pF-görbék meghatározásánál, értékelésénél és interpretálásánál egyaránt nehézséget és pontatlanságot okoz. A hiszterézis jelenségével EVERETT nyomán POUVASSILIS, CHILDS [5] és munkatársai [6], valamint PHILIP [31] ausztrál talajfizikai iskolája foglalkozott részletesen. PECK és PHILIP [31] több közleményükben értekeznek a hiszterézis görbék matematikai közelítésének lehetőségeiről. Hasonló kutatásokról KANIEWSKA és WALCZAK [13], hazánkban pedig KOVÁCS és PÉCZELY [16, 17, 18] is beszámolnak.

Az idevonatkozó szakirodalom áttekintése alapján egyértelműen megállapítható, hogy a pF-görbék matematikai leírásával a szerzők célja szinte minden esetben további vizsgáldálkodási paraméterek (pl.  $C_\theta$ , stb.), s elsősorban az ún. transzport-koefficiens (kapilláris vezetőképesség  $k(\psi)$ , illetve  $k(\theta)$ ; diffúzió  $D(\psi)$ ,  $D(\theta)$ ) számítás útján történő meghatározásának az elősegítése, megalapozása volt. Ez a törekvés mindenképpen indokolt, hisz a paraméterek közvetlen meghatározása még fejlett műszerezettség feltételezve is meglehetősen pontatlan és hosszadalmas, az adatokra viszont a talaj vizsgáldálkodásának korszerű jellemzésénél feltétlenül szükség van [39, 44].

A  $C_\theta$  a talajok ún. „differenciál” vagy „specifikus” vízkapacitása [12], amely az egységnyi  $\psi$ -hez tartozó  $\theta$ -változást fejezi ki:

$$C_\theta = \frac{d\theta}{d\psi}$$

A  $C_\theta$ ,  $k$  és  $D$  a talaj mechanikai összetételétől, tömördőtségtől, szerkezeti állapottól, valamint az adott nedvesség (illetve tenzió) tartománytól függő értékének (illetve függvényének) ismerete a talaj vizsgáldálkodása, a talajban történő nedvességtárolás lehetőségei, valamint a növények vízellátása szempontjából egyaránt fontos. E paraméterek pF-görbék alapján történő számítására közöl módszereket HILLEL [12], KUTILEK és SEMOTAN [20], MARSHALL [22], PECK [30], PECK és PHILIP [31]. Ebben az irányban végzett kutatásaink első eredményeiről magunk is beszámoltunk [45].

Lényegesen kevesebb közlemény foglalkozik a talajok pF,  $K$ ,  $k$ ,  $D$  értékek alapján történő korszerű vizsgáldálkodási jellemzésével, kategorizálásával, térképezésével [4], pedig a mezőgazdaság és a mezőgazdasági vizsgáldálkodás gyakorlata által egyre inkább igényelt információ-anyag a talajok vizsgáldálkodásáról csak ezeken a lépcsőkön keresztül válhat gyümölcsözően felhasználhatóvá. Kutatásaink végső célját és szükségsszerű további lépéseit ezért ezekben az irányokban látjuk.

### Vizsgálati anyag és módszer

A pF-görbék matematikai leírásának különböző egyenletekkel történő közelítési lehetőségeit Magyarország (elsősorban a Magyar Alföld) különböző talajtípusait reprezentáló 160 talajszelvény 524 genetikai szintjéből gyűjtött, bolygatatlan szerkezetű talajmintákon végzett laboratóriumi mérések adat-anyagának számítógépes feldolgozása alapján értékeltük.

A begyűjtött mintákból meghatároztuk a talajok kémhatását (elektrometrián),  $\text{CaCO}_3$ -tartalmát (SCHEIBLER módszerével), a telített talajpé elektromos vezetőképességét, a talaj adszorpciós kapacitását és kicserélhető  $\text{Na}^+$ -tartalmát (izotópindikációs módszerrel), összes szervesanyag-tartalmát (TYUBIN káliumbikromátos eljárásával), és mechanikai összetételét (KACSINSZKIJ módszerével).

Bolygatatlan szerkezetű mintákon mértük a talaj térfogatsúlyát, valamint hidraulikus vezetőképességét állandó, illetve csökkenő víznyomás módszerével [42].

A pF-görbék meghatározását az alacsony (atmoszféra alatti) tenziótartományban VÁRALLYAY homoklap és kaolinlap berendezéseiben [39, 42], az atmoszféra feletti tenziótartományban nyomásmembrános készülékben [36, 42] végeztük, előbbieken 5 cm magas, 20 cm<sup>2</sup> keresztmetszetű, 100 cm<sup>3</sup> térfogatú, bolygatatlan szerkezetű talajmintákon, 2-2 ismétlésben. A bolygatatlan szerkezetű mintákat kb. szabadföldi vízkapacitásnyi nedvességtartalmú talajokból gyűjtöttük. A minták vízzel történő telítése során a mintákat tartalmazó hengerek felső nyílását lyuggatott műanyag sapkával lezártuk a felszín duzzadásának, illetve a minta térfogatváltozásának megakadályozására. A mérések során a pF 0; 0,4; 1,0; 1,5; 2,0; 2,3; 2,7; 3,4; 4,2 és 6,2 szívóerő hatására beállt egyensúlyi nedvességtartalom értékét mértük és fejeztük ki térfogatszázalékban. A 10 mérési pont alapján szerkesztettük meg a pF-görbéket.

A mért pF-görbék matematikai leírásának közelítésére 6 egyenletet tettünk vizsgálat tárgyává. A számításokat a Magyar Tudományos Akadémia Talajtani és Agrokémiai Kutató Intézete, valamint a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának Agrokémiai és Talajtani Intézete közötti együttműködés keretében végeztük részben Budapesten, részben Puscsinóban. Munkánk kapcsolódott a „Szikesedési folyamatok modellezése” c. közös kutatási programunkhoz [19].

Vizsgálatainkat az alábbi egyenletekkel végeztük:

$$\psi = a \cdot \theta^{-B} \quad (1)$$

$$\theta = \frac{\theta_0}{1 + \left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^m} \quad (5)$$

ahol:

$\theta_0$  = vízzel telített talaj ( $\psi = 0$ ) nedvességtartalma — térfogat%,

$\theta$  = adott  $\psi$ -hez tartozó nedvességtartalom — térfogat%,

$\psi$  = matrix-potenciál — vízoszlop cm,

$\psi_0, m$  = kísérletileg meghatározott állandók.

$$\theta = \frac{\theta_0}{2} \operatorname{erfc} [c(pF - pF_0)] \quad (6)$$

$$\text{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} \cdot dt$$

ahol:

$\theta_0$ ,  $pF_0$  és  $c$  = kísérletileg meghatározott állandók, az  $\text{erfc}(z)$  pedig a komplementer hibafüggvény

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \quad (7)$$

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 \quad (8)$$

ahol:

$b_0 \dots b_5$  = a parciális regressziós koefficiensek  
 $x$  = a nedvességtartalom térfogat %-ban  
 $y$  = az  $x$  nedvességtartalomhoz tartozó szívóerő  $pF$ -értékben

$$\psi/\psi_0 = (\theta/\theta_0)^{-b} \quad (9)$$

ahol:

$\psi_0$  = levegőbelépési küszöbérték (vízoszlop cm),  
 $b$  = kísérletileg meghatározott állandó  
 $\theta_0$  = vízzel telített talaj ( $\psi = 0$ ) nedvességtartalma – térfogat %:

A függvények illesztése minden esetben lineáris regresszió analízissel, vagyis matematikai – statisztikai módszerrel történt. Az illesztés alapja a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazása, amikor is a hibaszórás értékét minimálisnak választjuk.

A polinomokkal történő illesztéshez a számítógépes feldolgozásra kifejlesztett rövidített DOOLITTLE-formulát alkalmaztuk [8]. A regresszióanalízis eredményeképp megkaptuk a mérési pontokra illesztett polinom parciális regressziós koefficienseit, a függvény illeszkedésének szorosságát kifejező korrelációs koefficiens ( $R$ ) értékét, a regresszió analízis variancia-táblázatának adatait ( $SQ$ ,  $FG$ ,  $MQ$  értékeket), valamint az egyes parciális regressziós koefficiensek szignifikációját kifejező parciális  $F$ -próba értékeket.

Vizsgálati anyagunkból kidolgozott eljárásaink szemléltetésére nyolc – fizikai és vizsgázdálkodási tulajdonságok tekintetében nagymértékben különböző – talajt választottunk ki:

- No 301. Karbonátos futóhomok A-szintje (10–15 cm), Kunpeszér.
- No 191. Mészlepedékes csernozjom homokos lösz C-szintje (100–105 cm), Érd.
- No 198. Karbonátos réti csernozjom iszapos vályog mechanikai összetételű B-szintje, (55–60), Dömsöd.
- No 169. Mészlepedékes csernozjom vályog mechanikai összetételű A-szintje (10–15 cm), Érd.
- No 146. Mészlepedékes csernozjom vályog mechanikai összetételű A-szintje, (10–15 cm), Martonvásár.
- No 349. Réti csernozjom agyagos vályog mechanikai összetételű A-szintje (5–10 cm), Törökszentmiklós.
- No 140. Réti talaj agyag mechanikai összetételű B-szintje (60–65 cm), Kis-újszállás.
- No 81. Kérges réti szolonyec agyag mechanikai összetételű  $B_2$ -szintje (17–22 cm) Püspökladány.

## Vizsgálati eredmények

A talajok főbb jellemzőit és mechanikai elemzésének eredményeit az 1. táblázatban mutatjuk be. A 2. táblázatban a szemléltetésre felhasznált 8 talaj pF-görbéinek mért, valamint az (5), (6), (7) és (8) egyenletekkel számított értékeit foglaltuk össze. A mért értéket az 1. ábrán grafikusan is bemutatjuk. A 2. ábrán a 301., 169. és 140. sz. minták mért és (1) egyenlettel közelített pF-görbéit; a 3. ábrán a 169. sz. minta mérési pontjait és ötödfokú polinommal ((8) egyenlet) illesztett, számítógéppel megrajzolt pF-görbét; a 4. és 5. ábrán az (5) és (6) egyenletekkel történő illesztés abszolút és relatív hibájának hisztogramjait; a 6. ábrán a 301., 169. és 140. sz. minták mért és (9) egyenlettel számított pF-görbéit tüntettük fel. A 3. táblázatban az (5)–(9) egyenletek kísérletileg meghatározott paramétereit, valamint a felhasználásukkal történő görbeillesztés szorosságát kifejező R-értékeket közöljük.

1. táblázat

A vizsgált talajok főbb kémiai és fizikai jellemzői

(1) Tulajdonságok	(2) Talajminta száma							
	301	191	198	169	146	349	140	81
pH	8,1	8,1	8,2	7,7	8,0	6,9	6,6	8,3
a) $\text{CaCO}_3$ tartalom %	25,5	30,1	30,5	7,1	1,2	1,2	—	—
EC mmhos/cm	0,2	0,9	2,2	1,7	0,9	1,7	0,2	1,6
b) Adszorpciós kapacitás mgé/100 g talaj	6,0	16,3	16,1	24,5	21,2	30,2	31,5	28,5
c) Kicsérélhető $\text{Na}^+$ %	1,7	0,2	0,6	0,1	0,5	0,2	2,8	49,4
d) Szervesanyag-tartalom %	0,4	0,4	1,9	4,1	2,3	3,1	3,6	1,53
e) Térfogatsúly, g/cm <sup>3</sup>	1,47	1,27	1,33	1,29	1,51	1,16	1,36	1,27
f) Mechanikai összetétel %								
g) Sósavas átdolgozás vesztősége	23,53	33,43	33,17	7,38	3,18	3,06	2,03	2,34
1–0,25 mm	14,62	4,46	—	4,04	1,99	0,07	0,19	0,53
0,25–0,05 mm	58,77	22,86	11,80	10,68	23,81	8,11	2,82	3,43
0,05–0,01 mm	1,14	24,56	31,81	46,16	31,32	26,67	22,55	32,30
0,01–0,005 mm	0,35	2,48	5,04	5,40	5,27	9,60	8,34	9,02
0,005–0,001 mm	0,15	2,36	6,40	2,83	5,52	14,23	15,56	11,71
<0,001 mm	1,44	9,85	11,78	23,51	28,91	38,26	43,51	40,65
h) Vízzel telített talaj hidraulikus vezetőképessége ( $K = \text{cm/nap}$ )	98,4	32,0	1,8	8,9	1,1	2,0	0,08	0,029

## Vizsgálati eredmények értékelése

Ha a  $\theta$  függvényében  $\psi$  értékét lineáris koordinátarendszerben ábrázoljuk, úgy exponenciálshoz hasonló lefutású görbét kapunk, amely a GARDNER [9] által javasolt (1) hatványfüggvénnyel közelíthető. Bár az (1) egyenletet, illetve annak transzformált alakját [(2) egyenlet] sok szerző alkalmazta a pF-görbe leírására [11, 23, 25, 26, 45, 47], azzal nem érhető el megfelelően

## 2. táblázat

A vizsgált talajok pF-görbéinek mért és számított értékei  
(nedvességtartalom térfogat %-ban)

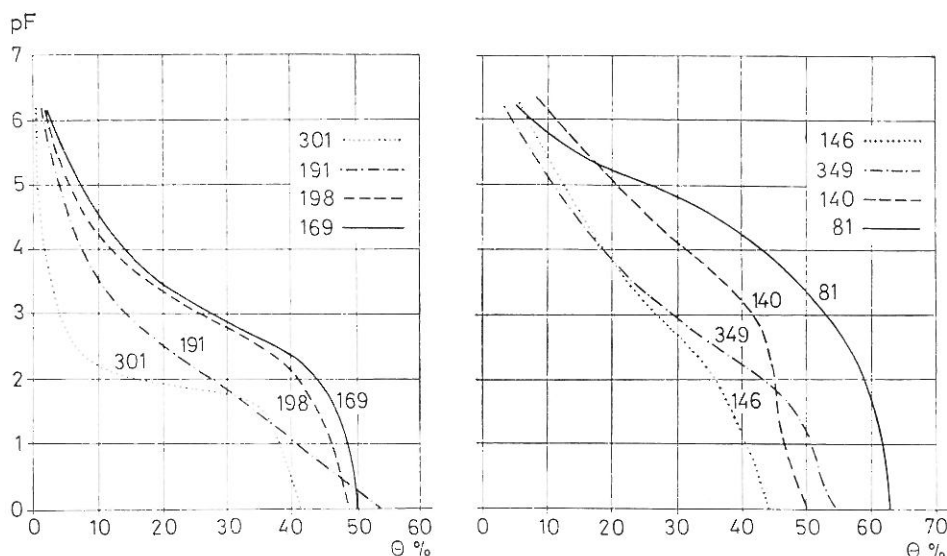
(1) Talajminta és egyenle- tek száma	pF									
	0	0,4	1,0	1,5	2,0	2,3	2,7	3,4	4,2	6,2
<b>301</b>										
a) Mért érték	42,3	40,9	38,3	35,9	15,1	8,9	5,4	2,9	2,2	0,3
(5)	41,7	41,5	39,8	33,2	17,5	8,7	2,7	0,3	0,0	0,0
(6)	41,4	41,3	40,1	33,1	17,8	8,9	2,2	0,1	0,0	0,0
(7)	42,5	41,1	38,4	35,0	11,8	9,0	6,6	3,6	0,6	0,0
(8)	42,1	41,1	38,9	33,9	14,4	7,9	5,6	3,4	1,8	0,0
<b>191</b>										
a) Mért érték	54,9	48,9	40,8	35,0	28,4	23,5	17,3	10,8	6,9	1,4
(5)	54,2	49,7	41,7	34,4	27,2	23,2	18,3	11,5	6,4	1,3
(6)	54,5	49,5	41,4	34,3	27,3	23,4	18,6	11,6	6,0	0,7
(7)	53,7	50,8	44,7	34,8	24,1	20,3	16,7	12,1	8,2	1,4
(8)	55,0	48,8	41,1	35,0	28,4	23,7	17,5	10,8	6,9	1,4
<b>198</b>										
a) Mért érték	54,5	48,6	46,0	44,0	42,1	39,9	33,6	21,4	11,1	1,8
(5)	51,2	50,4	48,5	45,7	41,4	38,1	32,7	22,2	11,7	1,4
(6)	51,7	50,9	48,8	45,6	41,1	37,6	32,4	22,4	12,1	0,9
(7)	53,0	51,1	47,9	44,5	40,1	36,7	30,9	20,3	12,7	2,2
(8)	55,6	49,7	46,3	43,7	41,0	39,0	36,1	19,5	10,8	2,2
<b>169</b>										
a) Mért érték	51,6	49,9	48,5	47,7	45,2	41,5	33,2	21,6	12,5	2,7
(5)	51,3	50,8	49,4	47,2	43,5	40,2	34,7	23,0	11,2	1,0
(6)	51,0	50,7	49,6	47,4	43,5	40,2	34,7	23,2	11,2	0,4
(7)	52,0	50,2	47,9	45,7	42,9	40,7	36,7	20,5	11,6	2,6
(8)	51,0	50,2	48,4	46,5	43,8	41,2	33,6	20,7	13,0	2,5
<b>146</b>										
a) Mért érték	44,8	43,0	41,5	39,0	36,5	34,0	30,2	23,2	17,1	5,7
(5)	44,7	43,6	41,4	38,9	35,8	33,6	30,4	24,1	17,0	5,1
(6)	44,8	43,7	41,4	38,8	35,7	33,5	30,3	24,3	17,4	4,8
(7)	45,1	43,5	40,9	38,4	35,6	33,6	30,7	24,8	17,5	4,2
(8)	44,6	43,4	41,3	39,0	36,2	34,0	30,4	23,3	17,0	5,7
<b>349</b>										
a) Mért érték	54,8	52,8	51,0	48,6	43,6	36,8	33,5	25,0	17,7	4,6
(5)	55,3	53,7	50,4	46,7	42,0	38,8	34,2	25,7	16,8	4,2
(6)	55,3	53,7	50,4	46,6	41,9	38,7	34,2	26,0	17,1	3,4
(7)	55,6	53,6	50,1	46,6	42,4	39,4	34,8	25,6	16,9	3,9
(8)	54,6	53,3	50,9	48,0	43,3	38,8	32,5	24,6	18,0	4,5
<b>140</b>										
a) Mért érték	50,2	49,1	46,2	45,4	45,1	44,7	43,5	37,6	28,3	9,3
(5)	48,9	48,5	47,8	46,9	45,4	44,2	42,2	37,2	29,1	9,0
(6)	48,7	48,5	47,9	47,0	45,5	44,3	42,2	37,0	29,2	9,2
(7)	50,5	49,4	47,7	46,0	44,3	43,1	41,4	37,8	32,2	6,8
(8)	49,9	49,1	47,7	46,3	44,7	43,6	41,8	37,7	29,8	9,0
<b>81</b>										
a) Mért érték	63,5	63,1	62,7	62,2	61,0	59,4	56,6	50,7	42,5	6,9
(5)	62,9	62,7	62,4	61,8	60,8	59,9	58,0	52,2	40,4	8,3
(6)	62,6	62,6	62,4	62,0	61,1	60,1	58,1	51,8	40,1	8,4
(7)	65,8	64,5	62,5	60,6	58,5	57,2	55,1	50,9	43,9	6,4
(8)	64,3	63,5	62,3	61,0	59,6	58,5	56,8	52,0	40,2	5,3



3. táblázat  
Kísérletileg meghatározott pF-görbe paraméterek

(1) Egyenletek és para- méterek száma	(2) Talajminta száma							
	301	191	108	169	146	349	140	81
(5) $\theta_0$ $\varphi_0$ $m$	41,73 80,00 1,4594	70,02 0, 29,00 0,3647	52,49 1352,60 0,6077	52,04 1679,00 0,5746	48,01 2581,50 0,3556	59,84 1129,70 0,3556	49,55 38295,20 0,4030	63,06 46769,40 0,5368
(6) $\theta_0$ $pF_0$ $c$	41,37 1,9125 1,4415	74,14 1,3024 0,5406	52,48 3,1333 0,4872	51,21 3,2504 0,5824	47,20 3,4776 0,3311	58,65 3,1157 0,3589	48,86 4,6324 0,4005	62,62 4,6890 0,5181
(7) $b_0$ $b_1$ $b_2$ $b_3$	4,65 -4,05 · 10 <sup>-1</sup> 1,96 · 10 <sup>-2</sup> -3,74 · 10 <sup>-4</sup>	6,73 -3,84 · 10 <sup>-1</sup> 1,02 · 10 <sup>-2</sup> -1,01 · 10 <sup>-4</sup>	6,81 -2,94 · 10 <sup>-1</sup> 8,13 · 10 <sup>-3</sup> -9,45 · 10 <sup>-5</sup>	7,08 -3,75 · 10 <sup>-1</sup> 1,29 · 10 <sup>-2</sup> -1,59 · 10 <sup>-4</sup>	7,16 -2,54 · 10 <sup>-1</sup> -6,62 · 10 <sup>-3</sup> -9,99 · 10 <sup>-5</sup>	7,12 -2,56 · 10 <sup>-1</sup> -6,06 · 10 <sup>-3</sup> -6,75 · 10 <sup>-5</sup>	7,17 -1,79 · 10 <sup>-1</sup> 6,16 · 10 <sup>-3</sup> -1,07 · 10 <sup>-4</sup>	7,09 -1,79 · 10 <sup>-1</sup> 5,22 · 10 <sup>-3</sup> -6,50 · 10 <sup>-5</sup>
(8) $b_0$ $b_1$ $b_2$ $b_3$ $b_4$ $b_5$	5,55 -8,81 · 10 <sup>-1</sup> 8,68 · 10 <sup>-2</sup> 4,18 · 10 <sup>-3</sup> 9,55 · 10 <sup>-5</sup> -8,45 · 10 <sup>-7</sup>	6,99 -5,93 · 10 <sup>-1</sup> 3,33 · 10 <sup>-2</sup> -9,84 · 10 <sup>-4</sup> 1,36 · 10 <sup>-5</sup> -7,06 · 10 <sup>-8</sup>	6,90 -3,17 · 10 <sup>-1</sup> 2,43 · 10 <sup>-2</sup> 5,30 · 10 <sup>-4</sup> -1,80 · 10 <sup>-5</sup> 1,58 · 10 <sup>-7</sup>	7,03 -3,71 · 10 <sup>-1</sup> 1,87 · 10 <sup>-2</sup> -7,16 · 10 <sup>-4</sup> 1,60 · 10 <sup>-5</sup> -1,45 · 10 <sup>-7</sup>	7,00 -8,09 · 10 <sup>-2</sup> -1,39 · 10 <sup>-2</sup> 7,37 · 10 <sup>-4</sup> -1,34 · 10 <sup>-5</sup> 6,69 · 10 <sup>-8</sup>	7,01 -1,93 · 10 <sup>-1</sup> 4,01 · 10 <sup>-3</sup> -2,01 · 10 <sup>-4</sup> 6,21 · 10 <sup>-6</sup> -6,39 · 10 <sup>-8</sup>	6,96 -5,32 · 10 <sup>-2</sup> 4,75 · 10 <sup>-3</sup> 1,43 · 10 <sup>-4</sup> 1,01 · 10 <sup>-6</sup> -3,51 · 10 <sup>-8</sup>	7,04 -2,36 · 10 <sup>-1</sup> -1,93 · 10 <sup>-2</sup> -8,23 · 10 <sup>-4</sup> 1,53 · 10 <sup>-5</sup> -1,03 · 10 <sup>-7</sup>
(9) $b$	2,36	4,19	5,10	5,30	8,56	7,21	14,41	19,0
R								
(5)	0,9956	0,9999	0,9946	0,9975	0,9992	0,9974	0,9958	0,9986
(6)	0,9946	0,9990	0,9937	0,9972	0,9986	0,9970	0,9948	0,9984
(7)	0,9887	0,9949	0,9931	0,9933	0,9978	0,9974	0,9929	0,9894
(8)	0,9950	0,9999	0,9982	0,9987	0,9997	0,9994	0,9954	0,9946
(9)	0,9671	0,9866	0,9033	0,9125	0,9636	0,9654	0,8842	0,9120

szoros görbeillesztés. Elsősorban azért, mert a mérési pontok eloszlása a koordináta-rendszerben egyenlőtlen, és a magas tenziótartományban mért értékek az egyenlet paramétereit az indokoltnál jobban befolyásolják, mint ez a 2. ábráról szemléletesen kitűnik. Az ábrán bemutatott 191., 169. és 140. sz. talajok esetében az  $R^2$  értéke 0,97; 0,83 és 0,78-nak adódott. A függvénygörbe menetére a B exponens értéke jellemző. GARDNER [9] szerint ez az érték finom



1. ábra

A vizsgált talajok pF-görbéi (Vízszintes tengely: nedvességtartalom térfogatszázalékban)

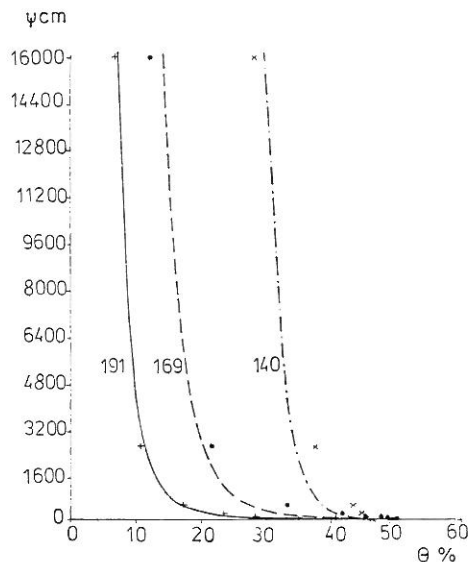
homokos vályog esetében 4,1–4,3-nak adódik, ami jól egyezik a hasonló mechanikai összetételű 191. sz. minta 4,19-es értékével. A 169. vályogra 5,30, a 140. agyagra 14,41 B-értéket kaptunk (3. táblázat).

A  $\theta$  lineáris, a  $\psi$  logaritmikus skálán történő ábrázolása esetén (pF-görbe általánosan elterjedt ábrázolása: 1. ábra) a  $\psi(\theta)$  függvény jellegzetesen S-alakú, legalább egy inflexiós ponttal rendelkező úgynevezett szigmoid görbe, amelynek közelítésére logisztikus vagy eloszlás függvények, valamint harmad vagy annál magasabbfokú polinomok alkalmazhatók. A logisztikus, illetve eloszlás függvények illesztését indokolja, hogy azok szigmoid görbék és korlátos monoton függvények, vagyis egy határértékhez közelítenek, ami jelen esetben fizikailag is értelmezhető: ez a vízzel telített talaj nedvességtartalma ( $\theta_0$ ). A harmadfokú polinom azért megfelelő, mert egy inflexiós ponttal rendelkező függvény. Az ötödfokú polinom alkalmazásával a harmadfokú polinommal elérhető illeszkedés még szorosabbá tehető.

Az (5) egyenlet alkalmazása esetén annak deriváltja:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{\psi_0}{m \theta_0} \cdot \frac{\left[1 + \left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^m\right]^2}{\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^{m-1}} \quad (10)$$

végtesen adódik, ha  $\psi = 0$  és  $m > 1$ ; illetve zéró, ha  $\psi = 0$  és  $m < 1$ . Ez teljes összhangban van a több szerző által hangsúlyozott megállapítással, amely szerint aggregált, szerkezetes talajokban a derivált értéke néha nagyon kicsi, néha nagyon nagy [19]. Mivel számításaink során a derivált értéke nem adódott sem zérónak, sem végtelennek, a (10) egyenlet közvetlenül nem volt



2. ábra  
 $\psi - \theta$  összefüggés közelítése az (1) egyenlettel

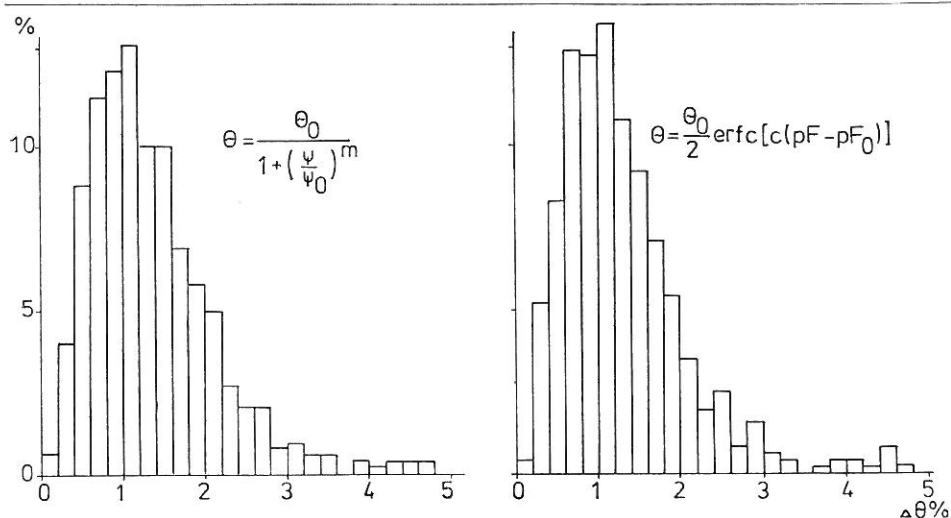
felhasználható a  $\theta - \psi$  összefüggés közelítésére. Ezért a (10) egyenletet némileg módosítottuk,  $\psi$  helyett annál kissé nagyobb  $\varepsilon_\psi$ -értékek behelyettesítésével.

A tenziótartomány nagyrésztében ( $pF > 0,5$ ) erre a módosításra nincs szükség, hisz csupán elhanyagolható különbség van a  $\psi$  és  $\varepsilon_\psi$  értékek között. Következésképpen itt az (5) egyenlet eredeti formájában alkalmazható. A teljes telítettséghez közeli tenziótartományban ( $pF < 0,5$ ) azonban az  $\varepsilon_\psi$  bevezetése megakadályozza, hogy a  $\frac{\partial \theta}{\partial \psi}$  derivált értéke zéró vagy végtelen legyen:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right|_{\psi=0} = - \frac{\psi_0}{m \cdot \theta_0} \cdot \frac{\left[ 1 + \left( \frac{\varepsilon_\psi}{\psi_0} \right)^m \right]^2}{\left( \frac{\varepsilon_\psi}{\psi_0} \right)^{m-1}} \quad (11)$$

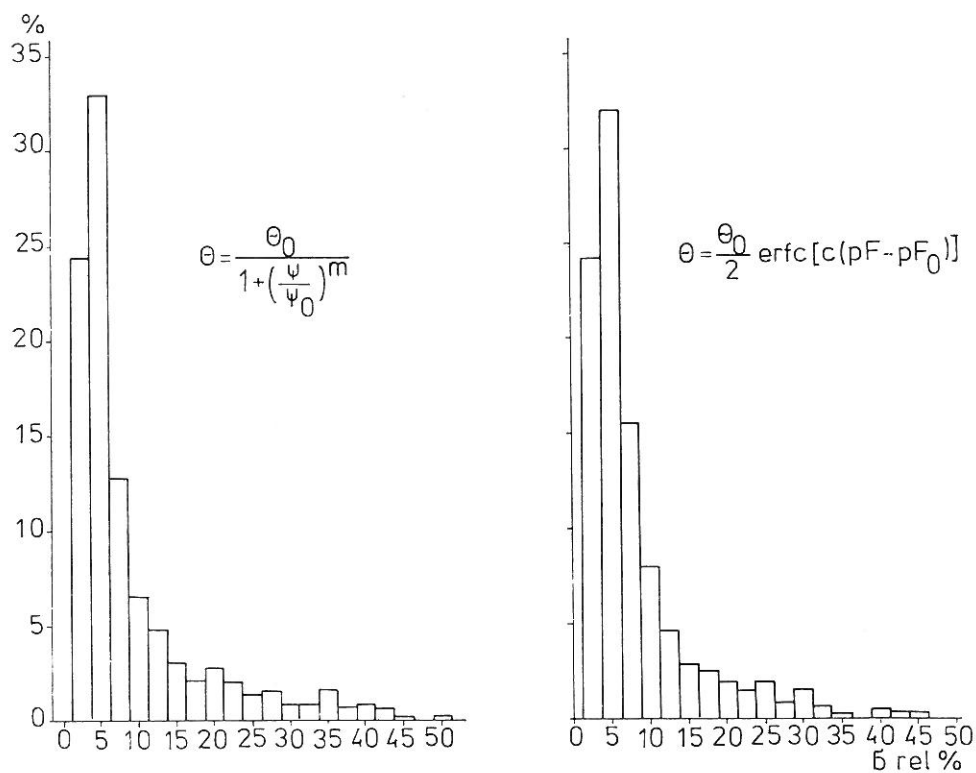
A mért, valamint az (5) és (6) egyenletekkel számított pF-görbék közti eltéréseket a teljes vizsgálati anyagra kiszámítottuk és hisztogramon ábrázoltuk. A számított és mért adatok közti abszolút  $\Delta \theta\%$  értékeket kifejező hisztogramot mutatjuk be a 3. ábrán.

A hisztogram közel normál log eloszlást mutat és szemléletesen jelzi a mért, valamint az (5) és (6) egyenletekkel számított adatok közti csekély különbségeket. Ugyanerre mutat az az elemzés is, amely szerint a mért és szá-



3. ábra

Mért, valamint az (5) és (6) egyenletekkel számított 524 pF-görbe abszolút hibájának ( $\Delta\theta$  %) hisztogramja



4. ábra

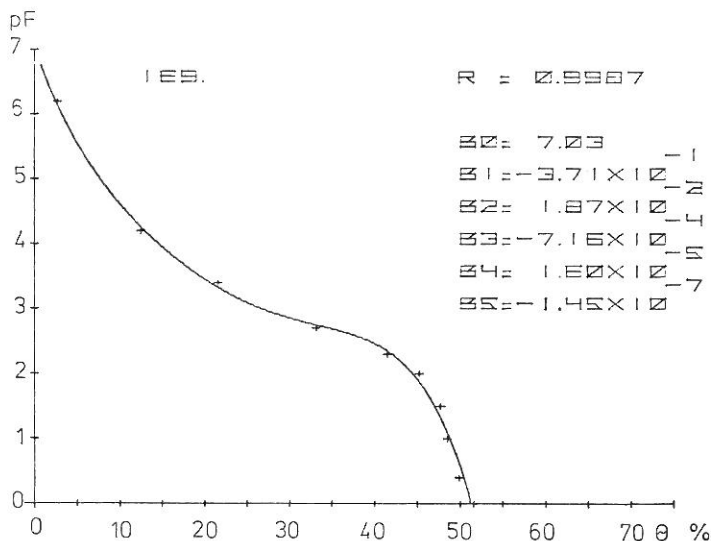
Mért, valamint az (5) és (6) egyenletekkel számított 524 pF-görbe relatív hibájának ( $\delta$  %) hisztogramja

mitott értékek közti relatív különbség ( $\delta\%$ ) a vizsgált minták kétharmadánál  $8\%$ , egyharmadánál  $4\%$  alatt marad (4. ábra).

A vizsgálataink bemutatására kiválasztott 8 talajmintára vonatkozó adataink szintén a mért és számított pF-görbék igen jó egyezéséről tanúskodnak. A 2. táblázatban ez közvetlenül szembetűnik, de ugyanerre utalnak a 3. táblázatban közölt R-értékek is, amelyek minden esetben meghaladják a 0,99-t.

A szakirodalomban több közlemény található polinomok pF-görbe leírására történő felhasználásáról. OLSZTA [28, 29] harmadfokú polinomokkal is igen jó görbeillesztést ért el különböző lengyelországi talajokon ( $R^2 = 0,9920 - 0,9968$ ). PECK és PHILIP [31], valamint KANIEWSKA és WALCZAK [13] a hiszterézis-hatás kimérésére, illetve deszorbeációs görbék alapján történő közelítő meghatározásra ugyancsak eredményesen alkalmazott polinomokat.

Vizsgálataink során a harmadfokú, de különösen az ötödfokú polinomokkal igen jó görbeillesztést értünk el [19, 40, 41, 43]. Néhány szélsőségesen könnyű (durva homok), illetve szélsőségesen nehéz (duzzadó szikes nehéz agyag) mechanikai összetételű talaj kivételével a mért és számított értékek közti abszolút ( $\Delta\theta\%$ ) és relatív ( $\delta\%$ ) különbségek az egész vizsgált mintaanyag esetében kicsik, gyakorlatilag a mintavétel és a mérés hibahatárán belül vannak. A szélsőséges mechanikai összetételű talajok egy részénél az illesztéshez görbekorrekcióra volt szükség. Mivel az elemzések során a polinom harmadfokú tagja is erősen szignifikáns volt, ezért az illesztést ötödfokú polinommal is elvégeztük. Az F-próba értékek még az ötödfokú tag szignifikanciáját is igazolták. A számítógép-programot rajzolási utasítással is kiegészítettük, így az előbb említett output-adatokon túlmenően a gép kirajzolta a mérési pontokhoz legjobban illeszkedő görbét. Az R-értékek ugyancsak igen jó görbeilleszkedésről tanúskodnak, s az esetek túlnyomó részében a 0,99-et is meghaladták. Ez tűnik ki a 2. és 3. táblázat adataiból is a bemutatott 8 talajra

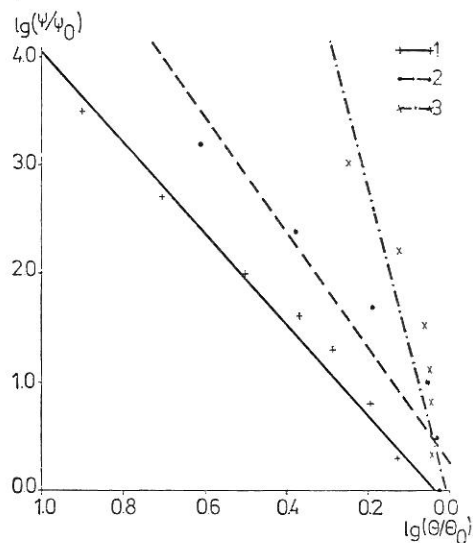


5. ábra

A 169. sz. talaj mért pontjaira ötödfokú polinom felhasználásával komputerrel meg-  
rajzolt pF-görbe



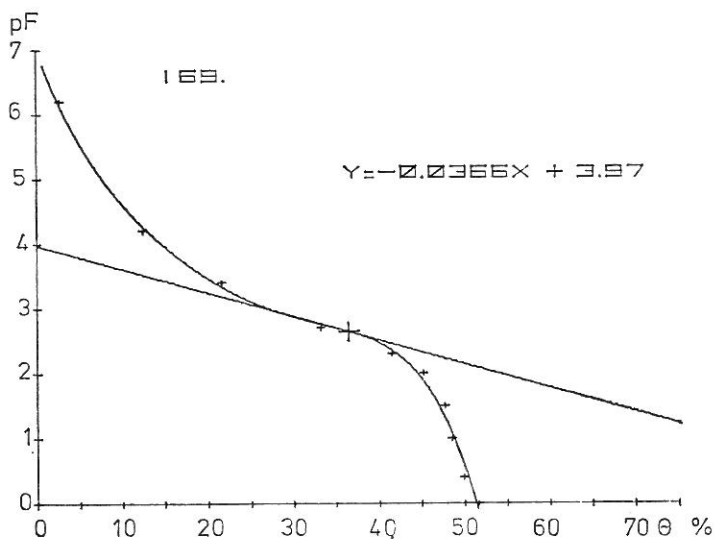
vonatkozóan. A szoros görbeillesztést szemléletesen mutatja a 169. sz. talajra ötödfokú polinom [(8) egyenlet] felhasználásával számítógéppel megrajzolt pF-görbe is (5. ábra).



6. ábra

$\psi - \theta$  összefüggés közelítése a (9) egyenlettel 1 = 191. sz. talaj, 2 = 169. sz. talaj, 3 = 140. sz. talaj

Amennyiben a  $\theta$  és  $\psi$  értékét egyaránt logaritmikus skálán ábrázoljuk a különböző szívóerőknél meghatározott nedvességtartalom értékek megköze-



7. ábra

A 169. sz. talaj pF-görbéjének inflexiós pontja és az ezen átmenő érintő egyenlete

lítően egy egyenes mentén helyezkednek el. Ezért itt célszerű a (9) függvény illesztése, amely tulajdonképpen az (1) egyenlet transzformált, illetve két konstans bevezetésével tovább transzformált alakja. A 6. ábrán ezt az összefüggést mutatjuk be a 191., 169. és 140. sz. talajokra.

Ilyen típusú összefüggés felhasználásáról több közlemény is beszámol [12, 23, 31]. Bár a görbeilleszkedés szorossága többnyire lényegesen gyengébb mint az (5), (6), (7) és (8) egyenletekkel történő közelítés esetében (3. táblázat), az összefüggést egyszerűsége miatt, mégis előszeretettel alkalmazzák az egyszerű talajfizikai paraméterek — pF-görbe összefüggés vizsgálatoknál, valamint a transzport koeficiensek pF-görbéből történő közelítő számításánál. Ebben a két irányban folyó kutatásainknál magunk is a (9) egyenletet használtuk fel egyik kiinduló pontnak [45]. A (9) egyenlet  $b$ -értéke jó összefüggést mutat a talajok mechanikai összetételével, szerkezeti állapotával, tömödöttségével, tehát eredményesen felhasználható a talajok vízgazdálkodási tulajdonságok szerinti kategorizálásánál is. A talajok vízgazdálkodásának a matematikailag leírt pF-görbék alapján történő további jellemzésére ún. tömörítő módszereket dolgoztunk ki, amelyek közül a három fontosabb a következő:

- a) a pF-görbe inflexiós pontja(i) koordinátáinak meghatározása;
- b) az inflexiós pont(ok)on átmenő érintő egyenes(ek) egyenletének meghatározása;
- c) a pF-görbe inflexiós pontjai közötti, illetve bizonyos vízgazdálkodási jellemzőkhöz (vízkapacitás, holtvíztartalom, hasznosítható vízkészlet stb.) tartozó görbeszakaszok alatti területek meghatározása.

A 7. ábrán a 169. sz. talajra mutatjuk be az a) és b) pontban megjelölt „tömörítő”-módszereket, amelyek részletes értékelésre és a talaj vízgazdálkodási tulajdonságainak jellemzésére történő interpretálásra jelenleg folynak vizsgálataink.

### Összefoglalás, következtetések

Vizsgálataink alapján összefoglalva megállapítható, hogy a pF-görbe matematikai leírásának megközelítésére az (5), (6), (7) és (8) egyenletek egyaránt igen jó lehetőséget nyújtanak, szoros görbeilleszkedést biztosítanak, gyakorlatilag az egész tenziótartományban. Az (1) és (9) egyenlet az egész pF-görbe leírására nem ad megfelelő pontosságú közelítést, csak a görbe egyes részeire illeszkedik szorosan. Ennek megfelelően csak olyan helyzetek vizsgálatánál alkalmazható eredményesen, mikor a nedvességtartalom csak szűk határok között változik. A pF-görbék matematikai leírása jó lehetőséget nyújt arra, hogy a diszkrét mérési pontokból álló pF-görbét folytonos pontsorrá alakítsuk. Ennek alapján bármely  $\psi$ -hez tartozó  $\theta$ , illetve  $\theta$ -hoz tartozó  $\psi$ -értéke közvetlenül számítható, ugyanígy a HILLEL-féle differenciál vagy specifikus vízkapacitás ( $C_\theta$ ) értéke is. Ezek az adatok pedig a talaj vízgazdálkodásának jellemzésénél, a talaj felszínére jutó víz útjának nyomon követésénél, a növények vízellátásának megítélésénél egyaránt nélkülözhetetlenek. Ugyanígy a helyszíni tenzióméteres mérések nedvességtartalomra történő átszámításánál, így a kiadagolandó és kiadagolható öntözővíz, az elvezetendő káros víz-többlet mennyiségének a meghatározásánál, illetve a jövőben kialakítandó — tenzióméterekkel regulált — részben vagy teljesen automatizált talajnedvesség szabályozó rendszerek (öntöző- és drénrendszerek) kialakításánál és üzemeltetésénél is, amelyekre — ha nem is nagyüzemi szabadföldi viszonyok között — már a

közeljövőben reálisan számítani lehet hazánkban is (üveg- és fólia alatti termesztésben, bizonyos különösen értékes kultúrák termesztésénél stb.).

A pF-görbék matematikai leírása nyújt lehetőséget arra, hogy módszeret dolgozzunk ki egyrészt a pF-görbék egyszerű talajfizikai paraméterek alapján, számítással történő közelítő meghatározására, illetve további vízgazdálkodási paraméterek (elsősorban az ún. transzport-koefficiensek: kapilláris vezetőképesség, diffúzió) pF-görbékből történő számítására.

Kutatásaink következő lépése egy új, korszerű kategória-rendszer kidolgozása a talaj vízgazdálkodásának a jelenleginél egzaktabb és kvantitatívabb jellemzésére. Ez egyaránt alapját képezi a talaj vízgazdálkodási tulajdonságainak területi ábrázolását célzó új térképezési módszernek, a talaj vízgazdálkodásában természeti okok vagy az emberi tevékenység hatására bekövetkező változások regisztrálására, folyamatos nyomon követésére szolgáló monitoring rendszernek, valamint a várható változások minél nagyobb pontossággal és valószínűséggel történő előrejelzésének. Ezek pedig egy optimális (illetve optimálist megközelítő) mezőgazdasági vízgazdálkodás kialakításának alapvető talajtani feltételei [41, 43, 44].

### Irodalom

- [1] BALAN, S.: Cercetari asupra relatiilor umiditatesuctiune la unele soluri din Cimpia Tisei. *An. Inst. St. Cerc. Pedol.* **11.** 31–43. 1974.
- [2] BOELS, D. et al.: Theory and system of automatic determination of soil moisture characteristics and unsaturated hydraulic conductivities. *Soil Sci.* **126.** 191–199. 1978.
- [3] CANARACHE, A.: Correlations between field capacity and clay content: a generalized semi-empirical equation. *Trans. 9th Int. Congr. Soil Sci.* Vol. III. 609–617. 1968.
- [4] CANARACHE, A.: New maps of the soil moisture properties in Southern Roumania. *Geol. Inst. Techn. Econ. Bull., Ser. C.* (18) 181–191. 1970.
- [5] CHILDS, E. C.: The physical basis of soil water phenomena. John Wiley. London. 1969.
- [6] CHILDS, E. C. & COLLIS GEORGE, N. C.: Interaction of water and porous materials, soil geometry and soil water equilibria. *Proc. Faraday Society.* **3.** 78–85. 1968.
- [7] DIMITRIU, R. & CANARACHE, A.: Procedeu de determinare a umiditatii solului intre pF 1 si 2 relatiile acesteia cu greutatea volumetrica si continutul de argila din sol. *An. Inst. St. Cerc. Pedol.* **38.** 29–42. 1971.
- [8] EZEKIEL, M. & FOX, K. A.: Korreláció és regresszió analízis. Lineáris és nem-lineáris módszerek. Közgazd. és Jogi Kiadó. Budapest. 1970.
- [9] GARDNER, W. R., HILLEL, D. & BENYAMINI, J.: Post irrigation movement of soil water: I. Redistribution. *Water Resources Res.* **6.** 851–861; II. Simultaneous redistribution and evaporation. *Water Resources Res.* **6.** 1148–1153. 1970.
- [10] DI GLÉRIA, J., KLIMES-SZMIK, A. & DVORACEK, M.: Talajfizika és talajkolloidika. Akad. Kiadó. Budapest. 1957.
- [11] GLOBUSZ, A. M.: Ekszperimental'naja gidrofizika pocv. *Gidromet.* Izd. Leningrád. 1969.
- [12] HILLEL, D.: Soil and water. Physical principles and processes. Acad. Press. New York–London. 1971.
- [13] KANIEWSKA, J. & WALCZAK, R.: A numerical interpretation of the hysteresis phenomenon in the drying and wetting processes of soil. *Polish J. Soil Sci.* **7.** 63–70. 1974.
- [14] KOVÁCS, Gy.: Characterization of molecular forces influencing seepage by means of the pF-curve. *Agrokémia és Talajtan.* **17.** Suppl. 1–12. 1968.
- [15] KOVÁCS, Gy.: A szivárgás hidraulikája. Akadémiai Kiadó. Budapest. 1971.
- [16] KOVÁCS, Gy.: Combination of geometrical, dynamic and statistical models to determine hydraulic conductivity. In: "Hydraulic problems solved by stochastic methods", 23-1 – 23-46. *Water Resources Publications.* Fort Collins. Colorado. 1977.

- [17] KOVÁCS, Gy. & PÉCZELY, F.: Hydrological investigation of the unsaturated zone. Circular of the IAHS. VITUKI Budapest. 1973.
- [18] KOVÁCS, Gy. & PÉCZELY, F.: A talajszelvény víztartóképesége. *Agrokémia és Talajtan*. **24**. 99–120. 1975.
- [19] KOVÁCS, V. A. & SZABOLCS, I. (Eds): Modelling of soil salinization and alkalization. *Agrokémia és Talajtan*. **28**. Suppl. 1979.
- [20] KUTILEK, M. & SEMOTAN, I.: Soil water properties of Gezira soils. Proc. Symp. New Developments in Field of Salt Affected Soils. 299–308. Cairo. 1975.
- [21] LAL, R.: Physical properties and moisture retention characteristics of some Nigerian soils. *Geoderma*. **21**. 209–223. 1979.
- [22] MARSHALL, T. I.: Relation between water and soil. Techn. Communication No 50. Commonwealth Bureau of Soils. Harpenden. 1959.
- [23] MICSURIN, B. N.: Energetika pocsvennoj vlagi. *Gidrometeoizdat*. Leningrád. 1975.
- [24] MICSURIN, B. N. & LÜTAEV, I. A.: Vzaimnaja zavisimost' mezdu szoderzsaniem vlagi, vszaszűvájuscsim davleniem i udel'noj poverhnoszt'ju pocsvü. *Pocsvovedenie*. (8) 109–119. 1967.
- [25] NERPIN, Sz. V. & CSUDNOVSZKIJ, A. F.: Fizika pocsv. *Izd. Nauka*. Moszkva. 1967.
- [26] NERPIN, Sz. V. & CSUDNOVSZKIJ, A. F.: Energo i masszooobmen v sziszterne rasztienie-pocsva-vozduh. *Gidrometeoizdat*. Leningrád. 1975.
- [27] NIELSEN, D. R. & SHAW, R. H.: Estimation of the 15-atmosphere percentage from hydrometer data. *Soil Sci.* **86**. 103–105. 1958.
- [28] OLSZTA, W.: Simulation of grass growth, water movement and soil temperature over high water table. *Agric. Eng. Res. Series*. (19) 1–151. 1975.
- [29] OLSZTA, W.: Simulation of dynamic soil moisture under conditions of constant evapotranspiration and constant water table depth. *Zeszyty Probl. Post Nauka Rolniczych*. **197**. 51–68. 1977.
- [30] PECK, A. I.: The hydrological characterization of soils. Proc. Arid Zone Techn. Conf. Warburton. Vol. 1. 40-1–40-6. 1960.
- [31] PECK, A. I. & PHILIP, I. R.: Some mathematical aspects of soil water. C.S.I.R.O. Division of Plant Industry. Manuscript Canberra. 1976.
- [32] RICHARDS, L. A.: The usefulness of capillary potential to soil moisture and plant investigations. *J. Agric. Res.* **37**. 719–742. 1928.
- [33] RICHARDS, L. A.: Physical condition of water in soil. In: "Methods of Soil Analysis", 128–152. Amer. Soc. Agronomy (Agronomy No 9). Madison. 1965.
- [34] SCHOFIELD, R. K.: The pF of the water in soil. *Trans. 3rd Int. Congr. Soil Sci.* **2**. 37–48. 1935.
- [35] STAKMAN, W. P. & HARST, G. G. VAN DER: Soil moisture retention curves. I. Directions for the use of the sand-box apparatus. Range pF to 2,7. *Inst. Land and Water Managm. Res. Wageningen*. 1969.
- [36] STAKMAN, W. P. & HARST, G. G. VAN DER: Soil moisture retention curves. II. Pressure membrane apparatus. Range pF 3,0 to 4,2. *Inst. Land and Water Managm. Res. Wageningen*. 1969.
- [37] TOPP, G. C. & ZEBCHUK, W.: The determination of soilwater desorption curves for soil cores. *Canad. J. Soil Sci.* **59**. 19–26. 1979.
- [38] TRZECKI, S.: Determination of water capacity of soils on the basis of their mechanical composition. *Roczniki Gleboznawcze*. **25**. 33–44. 1974.
- [39] VÁRALLYAY, Gy.: A talaj nedvességpotenciálja és új berendezés annak meghatározására az alacsony (atmoszféra alatti) tenziótartományban. *Agrokémia és Talajtan*. **22**. 1–22. 1973.
- [40] VÁRALLYAY, Gy.: Hydrophysical aspects of salt accumulation from the groundwater. *Trans. 11th Int. Congr. Soil Sci.* Vol. 1. 192–193. 1978.
- [41] VÁRALLYAY, Gy.: Soil factors limiting optimum water supply of plants. Proc. Int. Symp. "The influence of physical factors of soil environment on plant production". Lublin. 1978.
- [42] VÁRALLYAY, Gy.: A talaj fizikai és vízgazdálkodási tulajdonságainak vizsgálata. *MÉM Szabvány (MÉMSz 206)*. Budapest. 1978.
- [43] VÁRALLYAY, Gy.: A talajfizika helyzete és jövőbeni feladatai. *Agrokémia és Talajtan*. **27**. 203–218. 1978.
- [44] VÁRALLYAY, Gy. & RAJKAI, K.: pF-görbék matematikai leírása. *Mezőg. Vízg. Kut. Magyarországon — 1977*. VITUKI Közlemények 53–57. 1978.
- [45] VÁRALLYAY, Gy. & RAJKAI, K.: Háromfázisú talajok kapilláris vezetőképességének közelítő számítása a pF-görbékéből. *Mezőg. Vízg. Kut. Magyarországon — 1978*. VITUKI Közlemények. 1979.

- [46] VARAZASVILI, L. I., LÜTAEV, I. A. & PETROVA, M. V.: Sztatiszticeszkie parametru vlaznoszti pocsvü kak funkciü potenciala pocsvlennoj vlagi i szposzobü ih opredelenija. Pocsvovedenie. (1) 66–72. 1976.
- [47] VISSER, W. C.: Progress in the knowledge about the effect of soil moisture content on plant production. Inst. Land Water Managm. Techn. Bull. No 45 18–44. Wageningen. 1966.
- [48] VISSER, W. C.: The relation between lithological properties and the shape of the desorption curve. In: „Water in the unsaturated zone”. Symp. 305–311. UNESCO/IAHS Paris. 1969.
- [49] VISSER, W. C.: An empirical expression for the desorption curve. Inst. Land Water Mangm. Misc. Repr. No 83. 329–335. Wageningen. 1969.
- [50] ZAWADZKI, S. & MICHALOWSKA, K.: The relationship between pF values and soil surface area. Polish J. Soil Sci. 7. 47–51. 1974.

Érkezett: 1979. február 22.

## Mathematical Description of Water Retention Curves

G. VÁRALLYAY, K. RAJKAI, YA. A. PACHEPSKY and E. V. MIRONENKO

Research Institute for Soil Science and Agricultural Chemistry of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest and Institute of Agricultural Chemistry and Soil Science of the Academy of Sciences of the USSR, Pushchino

### Summary

The mathematical description of water retention (pF) curves gives good possibilities for:

- the up-to-date, computerized storage, processing and interpretation of measured moisture retention data;
- establishing relationships between the simple, easily measurable physical characteristics of soils (e.g. texture, bulk density, etc.) and water retention curves;
- the estimative calculation of further hydrophysical parameters (first of all the transport coefficients: capillary conductivity,  $k(\psi)$  or  $k(\theta)$  and the rate of diffusion,  $D(\psi)$  or  $D(\theta)$ ) on the basis of water retention curves;
- the elaboration of an exact and quantitative categorization — mapping — monitoring-prognosis system for the characterization of the hydrophysical properties and water management of soils;
- the evaluation and interpretation of field tensiometer-measurements;
- the establishment of automatic, tensiometer-regulated irrigation systems, etc.

A detailed literature-review was summarized and discussed in the first part of this paper.

The possibilities of the mathematical description of water retention curves were studied and evaluated on the basis of a computerized analysis of the data of pF-curve measurements, on 524 undisturbed soil samples, collected from the diagnostic horizons of 160 soil profiles, representing the various soil types, subtypes and local variants of Hungary (first of all the Hungarian Plain). Water retention curves were determined in Várallyay's sand-box (pF 0; 0,4; 1,0; 1,5; 2,0), and kaolin-box (pF 2,3; 2,7) apparatus [39, 42] in the low suction range, and in pressure-membrane apparatus (pF 3,4; 4,2) in the high suction range.

Six equations were used, analyzed and evaluated for the mathematical approximation of water retention curves. The list of symbols used in equations

(1) (5) (6) (7) (8) and (9) are as follows:

(1) (5) (6)  $\psi$  = suction, in water-column centimeters

(1) (5) (6)  $\theta$  = the moisture content of the soil (in volume percentage) at given  $\psi$  or pF

(5) (9)  $\theta_0$  = the moisture content of the soil (in volume percentage) at full saturation,  $\psi = 0$

(6)  $\text{erfc}(z)$  = the error function

(7) (8)  $b_0 \dots b_5$  = partial regression coefficients of the polynom

(7) (8)  $x$  = the moisture content (in volume percentage)

(7) (8)  $y$  = the suction (expressed as long  $\psi = \text{pF}$ ) at given  $x$

$a, B(1); \psi_0, m(5); \theta_0, c, pF_0(6); b(9)$  = experimentally determined constants.



The curve-fitting was done by computerized linear regression analysis (statistical method) in each case. For fitting the polynoms (equations (7) and (8)) the modified Doolittle procedure was applied. It gives the best fitting curve, the partial regression coefficients, data of the analysis of variance (AOV) table (SQ, FG and MQ values), the values of the partial and integral F-tests and the correlation coefficients (R). For the demonstration of our procedures 8 soil samples were selected from our collection, varying widely in texture, structure, compactness, pH and in other soil properties:

No 301. Calcareous blown-sand A-horizon;

No 191. Pseudomyceliar chernozem C-horizon; calcareous sandy loess;

No 198. Calcareous meadow chernozem B-horizon, highly calcareous silty loam;

No 169. Pseudomyceliar chernozem A-horizon, calcareous loam;

No 146. Pseudomyceliar chernozem A-horizon, slightly calcareous loam;

No 349. Meadow chernozem A-horizon, slightly calcareous clay loam;

No 140. Meadow soil B-horizon, non-calcareous sticky clay;

No 81. Shallow meadow solonetz B-horizon, non-calcareous swelling clay.

As a summarized conclusion of the investigations it can be stated, that equations (5) (6) (7) and (8) give nearly equally good curve-fitting within the whole suction range, consequently they can be properly used for the approximation of the mathematical description of water retention curves. It is clearly proved by the histograms presented in Figures 3 and 4, by the computer-drawn pF-curve demonstrated in Figure 5 and the high correlation coefficients ( $R < 0,99$ ) in Table 3. Equations (1) and (9) are not suitable for the accurate description of the water retention curve in the whole suction range and result in an appropriate curve-fitting only for some part(s) of the pF-curve.

For the characterization of water management of soils additional information has been obtained on the basis of further analysis of water retention curves, as:

(a) determination of the coordinates of the inflexion point(s) of the water retention curve;

(b) determination of the equation(s) of the tangent-line(s) through the inflexion point(s);

(c) computation of the area between the projected inflexion points and/or under the pF-curve-sections between traditional, conventional or new soil moisture constants (total water capacity, field capacity, wilting point, available moisture range, gravitational porospace; specific or dynamic water capacity,  $\frac{\partial \theta}{\partial \psi}$ , etc.).

The next step of the authors' researches will be the elaboration of a new, up-to-date categorization—mapping—monitoring-prognosis system for the more exact and quantitative characterization of the hydrophysical properties and moisture regime of soils, which is an indispensable soil scientific precondition of the development of an optimum (or at least nearly optimum) agricultural water management.

*Table 1.* Main physical and chemical properties of the studied soils. (1) Properties: a)  $\text{CaCO}_3$ -content, %; b) Cation exchange capacity (CEC), me/100 g soil; c) Exchangeable  $\text{Na}^+$  percentage (ESP); d) Organic matter content, %; e) Bulk density, g/cm<sup>3</sup>; f) Particle-size distribution, %; g) Loss in HCl-treatment; h) Saturated hydraulic conductivity ( $K = \text{cm/day}$ ); (2) Soil (Code No).

*Table 2.* Measured and calculated data of soil moisture retention for the studied soils (moisture content in volume percentage). (1) Soil Code and No. of equations: a) Measured values.

*Table 3.* The parameters of experimentally determined pF-curve. (1) No. of equations and parameters. (2) Soil Code No.

*Fig. 1.* Water retention curves of the studied soils. Horizontal axis: moisture content in volume percentage ( $\theta\%$ ).

*Fig. 2.* Approximation of the  $\psi-\theta$  relation with equation (1).

*Fig. 3.* Histogram of the absolute differences ( $\Delta\theta\%$ ) between the measured and calculated (with equations (5) and (6)) points of the water retention curves of 524 soil samples.

*Fig. 4.* Histogram of the relative differences ( $\delta\%$ ) between the measured and calculated (with equations (5) and (6)) points of the water retention curves of 524 soil samples.

*Fig. 5.* Water retention curve for No 169 soil. Measured values of the curve fitted by fifth-degree polynom, drawn by computer-plotter.

*Fig. 6.* Approximation of the  $\psi-\theta$  relation with equation (9)

*Fig. 7.* Point of inflexion and equation of the tangent line through this point, for the water retention curve of the No 169. soil.

# Matematische Beschreibung der Wasserspannungskurven

G. VÁRALLYAY, K. RAJKAI, YA. A. PATSCHEPSKY und E. V. MIRONENKO

Forschungsinstitut für Bodenkunde und Agrikulturchemie der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest und Institut für Agrochemie und Bodenkunde der Akademie der Wissenschaften der Sowjetunion, Puschtschino

## Zusammenfassung

Die mathematische Beschreibung der Wasserspannungskurven (pF-Kurven) bietet wesentliche Hilfe bei

- der zeitgemässen Speicherung (mittels Elektronenrechner), Behandlung und Deutung der Messwerte im Bereich des Bodenwasserhaushaltes;
- der Feststellung von Zusammenhängen zwischen den einfachen bodenphysikalischen Parametern (mechanische Zusammensetzung, Volumengewicht, usw.) und den pF-Kurven;
- der annähernden Berechnung weiterer wichtiger Wasserwirtschaftsparameter (in erster Linie die s. g. Transport-Koeffizienten: kapillare Leitungsfähigkeit,  $k$ ; Diffusionsgeschwindigkeit,  $D$ ;) aufgrund der pF-Kurven;
- der Kategorisierung der Böden nach ihrem hydrophysikalischen Wasserhaushalt, bei der Kartierung, der Ausarbeitung von Beobachtungs- oder/und Prognose-Systemen.

— Sie bedeuten beträchtlichen Vorteil bei der Auswertung von örtlichen Tensiometermessungen, bei Gestaltung von automatischen — mittels Tensiometern geregelten — Bewässerungsanlagen, usw.

Eine ausführliche, sowie kritische Übersicht der bezüglichen Literatur macht den ersten Teil der Mitteilung aus.

Die Möglichkeiten der mathematischen Behandlung der pF-Kurven wurden ausgewertet aufgrund einer mittels Elektronenrechner berechneten Aufarbeitung von Messwerten 524 genetischen Horizonten entstammenden ungestörter Bodenproben, die 160 Bodenprofile der verschiedenen Bodentypen Ungarns darstellen.

Die Bestimmung der pF-Kurven wurden im niedrigen Tensionsbereich (unter 1 atm.) mit den Sandbett- und Kaolinplattenapparaten von Várallyay (39, 42), im Tensionsbereich über 1 atm. mit Druckmembranapparaten durchgeführt.

Zwecks mathematischer Approximation der gemessenen pF-Kurven wurden 6 Gleichungen untersucht.

Bezeichnungen in den Gleichungen:

- (1), (5), (6)  $\psi$  = Matrix-Potential, Wassersäule in cm;
- (1), (5), (6)  $\theta$  = Feuchtigkeitsgehalt, zu gegebenem  $\psi$  gehörend, in Vol. %.
- (5), (9)  $\theta_0$  = Feuchtigkeitsgehalt des wassergesättigten Bodens, in Vol. %, ( $\psi = 0$ );
- (6)  $\text{erfe}(z)$  = ergänzende Fehlerfunktion;
- (7), (8)  $b_1 \dots b_5$  = partielle Regressionskoeffizienten;
- (7), (8)  $x$  = Feuchtigkeitsgehalt in Vol. %.
- (7), (8)  $y$  = Saugkraft zu  $x$  Feuchtigkeitsgehalt gehörend, in pF-Wert,
- $a, B(1); \psi_0, m(5); \theta_0, c, pF_0(6); b(9)$  = experimentell bestimmte Konstante.

Die Anpassung der Funktionen geschah in jedem Falle mit statistisch geregelter linearer Regressionsanalyse. Zur Anpassung von Polynomen wurde die für Elektronenrechneraufarbeitung entwickelte verkürzte Formel von Doolittle verwendet. Als Ergebnis der Regressionsanalyse konnten die partiellen Regressionskoeffizienten des den Messpunkten angepassten Polynoms, der die Güte der Anpassung angegebende Regressionskoeffizient ( $R^2$ ), die Angaben (SQ-, FG-, MQ-Werte) der Varianztabelle der Regressionsanalyse, wie auch die die Signifikanz der einzelnen partiellen Regressionskoeffizienten beschreibenden Werte der F-Probe erhalten werden.

Zur Veranschaulichung unseres ausgearbeiteten Verfahrens wurden aus dem Untersuchungsmaterial acht — in Bezug auf physikalische und Wasserwirtschaftseigenschaften (sowie Körnung, Gefüge, Bindigkeit) sehr abweichende — Böden ausgewählt:

- No. 301. A-Horizont eines karbonathaltigen Flugsandes;
- No. 191. C-Horizont eines Tschernosjombodens mit Kalkhüllen; (sandiger Löss);
- No. 198. B-Horizont eines karbonathaltigen Wiesen-Tschernosjombodens (schlammiger Lehm);
- No. 169. A-Horizont eines Tschernosjombodens mit Kalkhüllen, (Lehm);
- No. 146. A-Horizont eines Tschernosjombodens mit Kalkhüllen, (Lehm);

No. 349. A-Horizont eines Wiesenschernosjombodens (toniger Lehm);

No. 140. B-Horizont eines Wiesenbodens (schwerer Ton);

No. 81. B<sub>2</sub>-Horizont eines verkrusteten Wiesensolonetzbodens (Ton).

Es konnte festgestellt werden, dass die Gleichungen (5), (6), (7) und (8) zur Annäherung der mathematischen Behandlung des Zusammenhanges  $\psi/\theta$  (pF-Kurve) in gleicher Weise gute Möglichkeiten bieten. Sie sichern eine gute Kurvenanpassung praktisch im ganzen Tensionsbereich. Dies bestätigen die auf Abb. 3. und 4. dargestellten Histogramme, die auf Abb. 5. dargestellte pF-Kurve, wie auch die R-Werte von Tab. 3. Die Gleichungen (1) und (9) ergeben zur Beschreibung der ganzen pF-Kurve keine Annäherung von entsprechender Güte, sie passen sich nur an einzelne Teile der Kurve genügend genau an.

Zur weiteren Charakterisierung des Wasserhaushaltes der Böden aufgrund der mathematisch beschriebenen pF-Kurven wurden weitere Kennwerte bestimmt, von denen die drei wichtigsten die folgenden sind:

a) Bestimmung der Koordinaten der Inflexionspunkte der pF-Kurve;  
b) Bestimmung der Gleichung der durch die Inflexionspunkte gehenden Tangente(n);

c) Bestimmung der Fläche, die unterhalb des zwischen den Inflexionspunkten ablaufenden Kurvenabschnittes der pF-Kurve, bzw. unterhalb gegebener Abschnitte der zu gewissen Bodenkennwerten (totale Wasserkapazität, Welkpunkt, aufnehmbare Wasservorräte, Gravitationsporenraum, spezifische oder dynamische Wasserkapazität, usw.) gehörenden Kurven liegt.

Als nächster Schritt — als eine grundlegende bodenkundliche Aufgabe — in unserer Forschungsarbeit wird die Ausarbeitung eines neuen, zeitgemässen Klassifikations-, Kartierungs-, Beobachtungs- sowie Prognosesystems zu einer sehr genauen und zahlenmässigen Schilderung der Wasserwirtschaftskennwerte der Böden folgen, was eine Vorbedingung zur optimalen (oder nahezu optimalen) Gestaltung der landwirtschaftlichen Wasserwirtschaft darstellt.

Tab. 1. Einige chemische und physikalische Kennwerte der untersuchten Böden. (1) Eigenschaften: a)  $\text{CaCO}_3$ -Gehalt, %; b) Adsorptionskapazität, mval/100 g Boden; c) Austauschbares  $\text{Na}^+$ , %; d) Gehalt an organischen Stoffen, %; e) Volumgewicht,  $\text{g/cm}^3$ ; f) Körnung, %; Verlust bei der Behandlung mit Salzsäure; h) hydraulische Leitfähigkeit des mit Wasser gesättigten Bodens ( $K = \text{cm/Tag}$ ). (2) Bezeichnung der Bodenproben.

Tab. 2. Gemessene und berechnete Werte der pF-Kurven der untersuchten Böden (Feuchtigkeitsgehalt in Vol%). (1) Nummer der Bodenproben, sowie der Gleichungen: a) gemessener Wert.

Tab. 3. Im Versuch bestimmte Parameter der pF-Kurven. (1) Nummer der Gleichung und der Parameter. (2) Nummer der Bodenproben.

Abb. 1. pF-Kurven der untersuchten Böden (Abszisse: Feuchtigkeitsgehalt in Vol%,  $\theta\%$ ).

Abb. 2. Annäherung des Zusammenhanges  $\psi - \theta$  mit der Gleichung (1).

Abb. 3. Histogramm des absoluten Fehlers ( $\Delta\theta\%$ ) der gemessenen und auch mittels Gleichungen (5) und (6) berechneten 524 pF-Kurven.

Abb. 4. Histogramm des relativen Fehlers ( $\delta\%$ ) der gemessenen und auch mittels Gleichungen (5) und (6) berechneten 524 pF-Kurven.

Abb. 5. Mittels fünfgradigem Polynom unter Verwendung der Messpunkte der Bodenprobe No. 169 mit Elektronenrechner gezeichnete pF-Kurve.

Abb. 6. Annäherung des Zusammenhanges  $\psi - \theta$  mittels der Gleichung (9).

Abb. 7. Inflexionspunkt der pF-Kurve von Bodenprobe No. 169. und Gleichung der durch diesen Punkt laufenden Tangente.

# Математическое описание кривых рF

Д. ВАРАЛЛЯИ, К. РАЙКАИ, Я. А. ПАЧЕПСКИЙ и Е. В. МИРОНЕНКО

Научно-исследовательский институт почвоведения и агрохимии ВАН, Будапешт  
и Научно-исследовательский институт агрохимии и почвоведения АН СССР, Пушкино

## Резюме

Математическое описание кривых рF

- открывает возможность для машинной обработки, хранения и интерпретации данных измерений;
- позволяет установить зависимость между простыми физическими свойствами почвы (механический состав, объемный вес и т. д.) и кривыми рF;
- даёт возможность на основании кривых рF приблизительно определить (расчетным путем) такие важные воднофизические свойства почвы, как капиллярная водопроницаемость,  $k$ , скорость диффузии  $D$ ;
- дает основу для классификации почв по их водно-физическим свойствам и их картирования, а также для разработки систем мониторинга и прогноза;
- оказывает помощь при оценке полевых тензиометрических измерений, в создании автоматических оросительных систем, управляемых тензиометрами.

Авторы провели подробный разбор международной литературы по данному вопросу.

Оценили возможность математического описания кривых рF в Венгрии (в первую очередь для Венгерской Низменности) на основании машинно-обработанных данных лабораторных исследований почвенных образцов с ненарушенной структурой, взятых из 524 генетических горизонтов 160 почвенных разрезов. Снятие кривых рF при низком тензионном давлении (ниже атмосферы) провели на приборах с песчаными и каолиновыми пластинами (Варалляи, 39., 42.), при давлении выше атмосферы — на мембранном прессе.

Для математического описания кривых рF применяли шесть уравнений. Обозначения в уравнениях были следующими: (1) (5) (6)  $\psi$  = матрикс-потенциал, столб воды в см; (1) (5) (6)  $\theta$  = влажность в объемных процентах, относящаяся к определенному  $\psi$ ; (5) (9)  $\theta_0$  = влажность почвы насыщенной водой ( $\psi = 0$ ) в объемных процентах; (6)  $\operatorname{erfc}(z)$  = дополнительная функция ошибок; (7) (8)  $b_0 \dots b_5$  = парциальные коэффициенты регрессии; (7) (8)  $x$  = влажность в объемных процентах; (7) (8)  $y$  = всасывающее давление относящееся к влажности  $x$  в величинах рF;  $a$ ,  $B(1)$ ;  $\psi_0$ ,  $m(5)$ ;  $\theta_0$ ,  $c$ , рF<sub>0</sub> (6);  $b$  (9) = экспериментальные постоянные.

Аппроксимацию функций во всех случаях проводили линейным регрессионным анализом статистическими методами.

Для аппроксимации полиномами использовали сокращенную формулу Дулиттл, преобразованную для машинной обработки. Регрессионным анализом получили парциальные коэффициенты регрессии полинома аппроксимации точек измерения, величины коэффициентов корреляции (R), выражающие качество аппроксимации функциональной зависимости, данные вариационной таблицы регрессионного анализа (SQ, FG, MQ), а также парциальные величины пробы — F, показывающие достоверность парциальных коэффициентов регрессии.

Для иллюстрации разработанного метода, из изученного нами материала выбрали следующие почвы, отличающиеся по физическим и водным свойствам:

№ 301. Горизонт «А» карбонатных сыпучих песков.

№ 191. Опесчаненный лёсс из горизонта «С» мицелярного чернозема.

№ 198. Карбонатный луговой чернозем, горизонт «В»-илистый суглинок.

№ 169. Мицелярный чернозем, суглинистый горизонт «А».

№ 146. Мицелярный чернозем, суглинистый горизонт «А».

№ 349. Луговой чернозем, тяжелосуглинистый горизонт «А».

№ 140. Луговая почва, горизонт «В» — тяжелая глина.

№ 81. Корковый луговой солонец, горизонт «В» тяжелого механического состава.

Обобщая результаты проведенных исследований можно сказать, что для приближенного математического описания кривых рF с успехом могут быть использованы уравнения (5), (6), (7), (8), которые дают тесную аппроксимацию кривых практически во всем интервале всасывающего давления. Это подтверждают гистограммы, приведенные на рисунках 3. и 4., кривые рF, приведенные на рисунке 5, а также величины R, приведенные в таблице 3. Уравнения (1) и (9) не позволяют с определенной точностью описать всю кривую рF, хорошо аппроксимируется только одна часть кривой.

Для дальнейшей характеристики водно-хозяйственных свойств почвы на основе математически описанных кривых pF разработали следующие методы:

- а) Определение координат точек перегиба (i) кривой pF.
- б) Составление уравнения(ний) для прямой(прямых), проходящей через точку(точки) перегиба pF.
- в) Определение площади между точками перегиба кривой pF или под отрезками кривой, относящимися к различным формам влаги (влагоемкость, мертвый запас воды, усвояемая влага и т. д.).

Следующим этапом наших исследований является разработка новой, современной системы категорий, для более точной и качественной оценки водно-физических свойств почвы, составляющей основу для разработки нового метода картирования территориального распределения водно-физических свойств почвы, для регистрации их изменений, наступающих под влиянием природных и антропогенных факторов, для разработки системы мониторинга и более точного и вероятного прогноза. А все это, в свою очередь, является основными почвенными предпосылками для создания оптимального (или близкого к нему) аграрного водного хозяйства.

*Табл. 1.* Основные химические и физические свойства изученных почв. (1) Свойства: а) Содержание  $\text{CaCO}_3$  в %. б) Ёмкость поглощения в мг.экв/100 г почвы. с) Обменный натрий в %. д) Содержание органического вещества, %. е) Объемный вес, г/см<sup>3</sup>. ф) Данные механического анализа, %. г) Потеря на обработку соляной кислотой. h) Гидравлическая проводимость почвы насыщенной водой ( $K = \text{см/день}$ ). (2) Номер почвенного образца.

*Табл. 2.* Измененные и рассчитанные величины кривых pF для изученных почв (влажность в объемных процентах). (1) Почвенный образец и номер уравнения: а) Измеренная величина.

*Табл. 3.* Параметры кривых pF определенные экспериментально. (1) Номер уравнения и параметры. (2) Номер почвенного образца.

*Рис. 1.* Кривые pF изученных почв (По горизонтальной оси: влажность в объемных процентах) ( $\theta$  %).

*Рис. 2.* Приближенное описание зависимости  $p-\theta$  с помощью уравнения (1).

*Рис. 3.* Гистограмма абсолютного расхождения между измеренными и вычисленными по уравнениям (5) и (6) 524 кривыми pF ( $\Delta\theta$  %).

*Рис. 4.* Гистограмма относительного расхождения между измеренными и вычисленными по уравнениям (5) и (6) 524 кривыми pF ( $\sigma$  %).

*Рис. 5.* Кривая pF аппроксимированная полиномом пятой степени и начерченная вычислительной машиной (почвенный образец № 169).

*Рис. 6.* Приближенное описание зависимости  $p-\theta$  при помощи уравнения (9).

*Рис. 7.* Точка перегиба кривой pF и проходящая через нее касательная. (Почва № 169.)